**Ejercicio 3.1. Función par e impar [6 Puntos]**

Dadas las deﬁniciones de función par e impar, analice si es posible que exista alguna función (o varias) que puedan ser pares e impares al mismo tiempo. En caso de que la respuesta sea aﬁrmativa, diga cuál o cuáles funciones cumplen con esto; en caso de que su respuesta sea negativa, de argumentos generales para demostrarlo.

**Deﬁnición Función Par y Función Impar.**

Sea la función *f*: R→R deﬁnida en un dominio qué contiene al 0∈R. La función f es llamada función par cuando se cumple que

De manera similar, la función f es llamada función impar se cumple que

Para poder tener una función que sea par e impar al mismo tiempo la siguiente función debería cumplirse

Por lo que la siguiente ecuación también debería cumplirse

Si se despeja la ecuación

Se pasa el 2 al otro lado dividiendo

Por lo que la única función que podría cumplir con dicha definición es la siguiente

**Ejercicio 3.3. Ortogonalidad del sistema trigonométrico [7 Puntos]**

Termine la demostración del Teorema 3.1.

Teorema3.1—Ortogonalidad del sistema trigonométrico. Los elementos del sistema trigonométrico cumplen con las siguientes condiciones para todo par de números n,m∈Z:

Demostración

Para la primera demostración con la función

Se usará la identidad trigonométrica

Por lo que quedaría la siguiente ecuación

(2 sin((m - n) π))/(m - n)

Al evaluar n y m con cualquier número natural (siempre y cuando no sean iguales ya que m-n en el divisor la indeterminaría) daría 0 ya que el seno de cualquier múltiplo entero de π es 0.

Para la demostración de

Se usará la siguiente identidad trigonométrica

Por lo que al ponerlo en una ecuación quedaría de la siguiente forma

Al hacer y evaluar ambas integrales el resultado es 0 por lo que se comprueba la ortogonalidad